بهبود روش انتقال پایدار به‌منظور کنترل هم‌گرایی رویهٔ اندازه‌گیری عملکرد سازه‌ها *

بهروز کشته‌گر[۱]

چکیده رویهٔ اندازه‌گیری عملکرد (PMA) یک روش برای ارزیابی قیدهای احتمالاتی در مسائل طراحی بهینه براساس قابلیت اعتماد سازه‌ها می‌باشد. روش مقدار متوسط ارتقا یافته (AMV) به صورت ساده و کارایی برای رویهٔ PMA مناسب است. رویهٔ تکرار AMV ممکن است در بعضی از قیدهای احتمالاتی غیرخطی دچار واگرایی به‌صورت نوسانی یا اغتشاش گردد. در مقالهٔ حاضر، یک رویهٔ انتقال پایدار برای هم‌گرایی مناسب توابع عملکرد غیرخطی ارائه شده است. این روش براساس تعریف یک طول گام مناسب بین صفر و یک که به‌سادگی برمبنای نتایج جدید رویهٔ AMV و نتایج تکرار قبلی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار قابل محاسبه است، پایه‌گذاری شده است. به‌منظور هم‌گرایی مناسب روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار، شرط شیب در تکرارهای متوالی لحاظ شده است. نتایج عددی چندین تابع غیرخطی عملکرد مسائل بهینه برمبنای قابلیت اعتماد نشان می‌دهد که روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار موجب کنترل ناپایداری حل رویهٔ PMA می‌شود و هم‌چنین، در مسائل سازه‌ای با عملکرد غیرخطی، نسبت به رویهٔ AMV توانمندتر و نسبت به رویهٔ انتقال پایدار، کاراتر است.

واژه‌های کلیدی روش اندازه‌گیری عملکرد، مقدار متوسط پیشرفته، طراحی بهینه براساس قابلیت اعتماد، روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار.

Improved Stability Transformation Method to Control Convergence of Structural Performance Measure Approach

B. Keshtegar

Abstract *Performance measure approach (PMA) is a method for evaluating the probabilistic constraints in reliability-based design optimization of structures. The advanced mean-value (AMV) method is suitable for PMA, simply and efficiently. The iterative AMV scheme could be yielded to unstable solutions such as periodic-oscillation and chaos for highly nonlinear performance functions. In the present paper, an improved stability transformation method (ISTM) is proposed for appropriate convergence of nonlinear performance functions. This iterative approach has been established based on a suitable stepsize between one and zero that is simply calculated on the basis of the new results of AMV scheme and the previous results of the improved stability transformation iterative formula. The descent condition was applied in the iterative sequences of the ISTM to achieve stable convergence. The results of several nonlinear performance functions in reliability-based design optimization demonstrate that the ISTM is laded to control instability solutions of PMA and also, it is more robust than AMV and more efficient that stability transformation method in structural problems with nonlinear performance functions.*

Key Words Performance Measure Approach, Advanced Mean-Value, Reliability-Based Design Optimization, Improved Stability Transformation Method.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۶/۲۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۸/۴ می‌باشد.

(۱) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه زابل.

bkeshtegar@uoz.ac.ir

مقدمه

به‌طور معمول روش‌های طراحی بهینه برای سیستم‌های مهندسی براساس مدل‌های معین صورت می‌پذیرد. عدم اطمینان‌های مسائل فیزیکی از قبیل خطاهای ساخت و اجرا، خواص مصالح و بارهای بهره‌برداری را نمی‌توان در طراحی سازه‌ها نادیده گرفت. در مسائل مهندسی، عدم قطعیت در پارامترهای اعضای سازه‌ای موجب می‌شود تا طراح با یک مسئلهٔ تصادفی مواجه گردد. واضح است طراحی برمبنای قابلیت اعتماد (RBDO) (Reliability-based design (RBDO) optimization) یک ابزار قابل قبول برای طراحی با عملکرد مطلوب فراهم می‌سازد و معرفی طرح عملکرد سازه‌ها، می‌تواند یک زمینهٔ طراحی بهینهٔ مناسب و ایمن را ایفا نماید [1-3].

مدل‌های طراحی RBDO علاوه بر تأمین مسائل اقتصادی یک سازه موجب طرح مطمئن با عملکرد مناسب نیز می‌گردد. به‌طوری‌که در یک طرح بهینهٔ سازه، اطمینان از عملکرد بالای آن نیز حاصل می‌گردد.

در مسائل PBDO حداقل‌سازی هزینه برمبنای قیدهای با توابع عملکرد احتمالاتی می‌باشد. تحلیل قابلیت اعتماد قیدهای احتمالاتی برمبنای دو رویهٔ معمول؛ ۱) رویهٔ تحلیل شاخص قابلیت اعتماد (Reliability index approach) (RIA)، ۲) روش اندازه‌گیری عملکرد (Performance measure approach)(PMA)، صورت می‌پذیرد [4-6]. رویهٔ RIA، براساس تحلیل قابلیت اعتماد قیدهای احتمالاتی با هدف جستجوی نقطهٔ حداکثر محتمل (Most probable point) (U^*) تابع شرایط حدی (قید احتمالاتی $g(U)$) در فضای نرمال استاندارد پایه‌گذاری شده است [6,8].

$$\begin{aligned} &\text{find } U^*, \quad \min\ \beta = \|U\| \\ &\text{Subjected to } g(U) = 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن β شاخص قابلیت اعتماد است. درحالی‌که رویهٔ PMA قیدهای احتمالاتی مسئله را براساس جستجوی نقطهٔ حداقل عملکرد (Minimum performance target point) (U_t) روی سطح خرابی ($g(U)$) بااستفاده از شاخص قابلیت اعتماد هدف (target reliability index) (β_t) ارزیابی می‌گردد [1,5].

$$\begin{aligned} &\text{find } U_t, \quad \min\ g(U) \\ &\text{Subjected to } \|U\| = \beta_t \end{aligned} \tag{۲}$$

رویهٔ تحلیل اندازه‌گیری عملکرد می‌تواند در مسائل معکوس قابلیت اعتماد نیز مورد استفاده قرار گیرد [7]. هم‌چنین نشان داده شده است که رویهٔ PMA نتایجی مشابه به رویهٔ RIA در قیدهای احتمالاتی ارائه داده است اما توانمندی آن برای محاسبهٔ نقطهٔ هدف عملکرد کمینه بیشتر از رویهٔ RIA است [6] و پایداری عددی بالایی در ارزیابی احتمالاتی دارد [1,6,8].

رویهٔ تکرار مقدار متوسط ارتقا یافته (AMV) (Advanced mean-value) به‌سادگی و با کارایی بالایی در تحلیل PMV مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطالعات عددی نشان داده است که رویهٔ AMV در روش PMV، برای ارزیابی قیدهای احتمالاتی غیرخطی مسائل RBDO، ناپایداری تکرار دارد و به‌طور ناکارآمد و غیرمؤثری می‌تواند به‌صورت اغتشاش [5] و نوسانی تناوب [5,9] هم‌گرا گردد [5,6]. چندین الگوریتم بهبودیافته برای ارتقای هم‌گرایی رویهٔ AMV توسط مراجع پیشنهاد شده است [5,6,9-12]. اخیراً، الگوریتم ترکیبی مقدار متوسط (Hybrid mean value) (HMV) برای بهبود کارایی و پایداری عددی الگوریتم PMV معرفی گردیده است [9,10]. هم‌چنین، روش مقدار متوسط مزدوج (Conjugate mean value method) (CMV) [10] برای جستجوی نقطهٔ حداقل عملکرد توسعه داده شده که کاربردهایی از آن توسط مراجع [11,12] ارائه شده است. اخیراً، با استفاده از نگاشت غیرخطی انتقال پایدار Yang و Yi ناپایداری عددی رویهٔ AMV را براساس کنترل اغتشاشات بهبود بخشیده‌اند [5]. آنها براساس انتخاب یک طول گام بسیار کوچک قیدهای احتمالاتی غیرخطی مسائل RBDO را ارزیابی نمودند و نشان دادند که رویهٔ انتقال پایدار (Stability Transformation Method (STM)) علاوه بر هم‌گرایی و پایداری عددی حل، توانمندی رویهٔ

تکرار PMV را نیز افزایش داده است.

درحقیقت روش‌های HMV و ارتقا یافته HMV بر پایداری عددی تکرارهای رویهٔ PMA تمرکز داشته‌اند که نیاز به اطلاعات زیادی از قبیل تعقر یا تحدب تابع عملکرد و چندین بردار نرمال از تکرارهای متوالی دارد که موجب پیچیدگی الگوریتم می‌شود. به‌طوری‌که، ممکن است در مسائل مقعر واگرا گردد یا هم‌گرایی کندی داشته باشد [5,10]. از طرفی، رویهٔ انتقال پایدار برای افزایش توانمندی رویهٔ PMA نیاز به انتخاب طول گام پایین دارد. لذا، موجب افزایش تعداد تکرار می‌شود و در مسائل با درجهٔ غیرخطی متوسط نسبت به الگوریتم‌های CMV و HMV از کارایی کمتری برخوردار است. اما در مسائل با درجهٔ غیرخطی بالا، هم‌گرایی مناسبی دارد و توانمندی آن نسبت به روش‌های تکرار PMA بیشتر است. در این مقاله روش انتقال پایدار بااستفاده از یک طول گام دینامیکی پیشنهادی بهبود بخشیده شده و با نام روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار معرفی شده است. این طول گام دینامیکی در رویهٔ انتقال پایدار برای ارزیابی تابع عملکرد قیدهای احتمالاتی مسائل RBDO به‌کار گرفته شده است. برای تضمین هم‌گرایی روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار، شرایط شیب در محاسبهٔ طول گام دینامیکی لحاظ شده است. نتایج عددی حاکی از آن است که الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار برمبنای طول گام دینامیکی نسبت به روش انتقال پایدار از کارایی بیشتری و نسبت به رویهٔ تکرار AMV از توانمندی بیشتری برخودار است.

رویهٔ اندازه‌گیری عملکرد قیدهای احتمالاتی مسائل RBDO

در ده سال اخیر، تمایل تحلیل و طراحی بهینه برمبنای قیدهای احتمالاتی با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی هم‌چون بار، هندسه، شرایط مرزی، خواص مصالح و هم‌چنین خطای مدل‌سازی، افزایش یافته است [10]. از این‌رو، تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها در طرح مطمئن یک مسئلهٔ بهینه‌یابی مورد استفاده قرار گرفته است. مدل ریاضی طرح بهینه برمبنای قابلیت اعتماد را می‌توان به طور کلی مطابق با رابطهٔ زیر بیان نمود [5,6,8]:

$$\begin{aligned} &\text{find } d, \quad \min f(d) \\ &\text{S.t. } P_f(g_i(d,x)\le 0)\le P_{i,ft} \quad (i=1,2,\dots,p) \\ &\quad d^L \le d \le d^U \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن d بردار متغیرهای طراحی مسئله است که به‌صورت یک پارامتر معین یا یک متغیر تصادفی که بااستفاده از تابع توزیع احتمال با خواص آماری مانند میانگین، انحراف معیار قابل بیان است، x بردار متغیری تصادفی مسئله است که عدم قطعیت‌های مسئلهٔ بهینه به‌کمک آن براساس توابع شرایط حدی یا عملکرد قابل بیان هستند. $g(d,x)\le 0$ ناحیهٔ خرابی مسئله (ناحیه‌ای که بار وارد بیشتر از مقاومت سازه است) می‌باشد. $P_{i,ft}$ احتمال خرابی حداکثر (احتمال خرابی هدف) می‌باشد که می‌تواند براساس تابع عملکرد به‌صورت زیر محاسبه گردد [13,14]:

$$P_f = P[g(d,x)\le 0] = \int_{g(d,x)\le 0} f_X(x)dX \tag{٤}$$

که در آن $f_X(x)$ تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی پایهٔ X می‌باشد. برای محاسبهٔ انتگرال فوق می‌توان از روش‌های شبیه‌سازی از جمله مونت کارلو استفاده نمود روش مونت کارلو، برآورد بسیار مناسبی از انتگرال معادلهٔ (٤) با توجه به شبیه‌سازی کافی ارائه می‌دهد اما، به‌علت شبیه‌سازی زیاد در احتمال خرابی پایین یا مسائل دینامیکی و اجزای محدود بسیار وقت‌گیر می‌باشد [13,14] از این‌رو، استفاده از روش‌های اولین مرتبهٔ تحلیل قابلیت اعتماد (First-order reliability method) در محاسبهٔ احتمال خرابی اجتناب‌ناپذیر است. این روش‌ها برمبنای یک رابطهٔ تکرار با هدف تعیین شاخص قابلیت اعتماد (β) برآورد بسیار مناسبی از احتمال خرابی ارائه می‌دهند [15,16].

$$P_f \approx 1-\Phi(\beta) = \Phi\left(-\left\|U^*\right\|\right) \tag{۵}$$

که در آن Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. در مسائل RBDO، قیدهای احتمالاتی را ($P_f(g_i(d,x)\le 0)\le P_{i,t} \quad (i=1,2,...,p)$) می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۵) و شاخص قابلیت اعتماد هدف ($\beta_t \approx -\Phi^{-1}(P_{ft})$) با تلاش برای تعیین نقطهٔ حداقل عملکرد (U_t) به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$g_i(d,x)=F_{g_i}^{-1}[\Phi(-\beta_{i,t})]\ge 0 \quad (i=1,2,...,p) \qquad (٦)$$

که در آن $\beta_{i,t}$ مقدار شاخص قابلیت اعتماد هدف برای قید احتمالاتی i ام مسئلهٔ RBDO می‌باشد. $F_{g_i}^{-1}$ معکوس تابع توزیع تجمعی احتمال برای قید احتمالاتی g_i با تابع عملکرد $g_i(d,x)$ است. تلاش اساسی در رویهٔ PMA ارزیابی عملکرد قیدهای احتمالاتی توابع عملکرد مسئلهٔ RBDO است. بااستفاده از انتقال متغیرهای تصادفی X به‌صورت نرمال استاندارد و غیروابستهٔ U براساس انتقال به فضای نرمال استاندارد به‌صورت نگاشت $U=T(X)$ [14,16]، عملکرد مسئلهٔ بهینه‌سازی را می‌توان به‌صورت زیر ارزیابی نمود [5,9,10]:

$$\begin{aligned}&\text{given } d \text{ and find } U_t\text{ , min } g(d,U)\\&\text{Subjected to } \|U\|=\beta_t\end{aligned} \qquad (٧)$$

مسئلهٔ فوق به‌دنبال پیداکردن نقطه‌ای روی تابع عملکرد ($g(d,U)$) است که فاصلهٔ آن در فضای نرمال استاندارد برابر با β_t گردد. به‌طوری‌که، مقدار تابع عملکرد در این نقطه (نقطهٔ هدف حداقل عملکرد U_t) کمینه گردد. روش تکرار مقدار متوسط ارتقایافته (AMV) می‌تواند به‌طور مناسب و ساده‌ای برای تعیین نقطهٔ هدف حداقل عملکرد (Minimum performance target point) (MPTP)، مطابق با رابطهٔ تکراری زیر مورد استفاده قرار گیرد [7-12].

$$U_{k+1}=-\beta_t\frac{\nabla_u g(d,U_k)}{\|\nabla_u g(d,U_k)\|} \qquad (٨)$$

که در آن $\nabla_u g(d,u_k)$ بردار گرادیان تابع عملکرد نسبت به بردار متغیرهای تصادفی U مسئلهٔ RBDO در نقطهٔ U_k است. در رابطهٔ تکراری رویهٔ AMV (رابطهٔ ۸) برای مسائل با توابع عملکرد غیرخطی، مقدار بردار گرادیان تابع عملکرد در نقطهٔ جدید ممکن است موازی با بردار یکهٔ نقاط قبلی گردد. لذا، تکرار روش AMV ممکن است دچار واگرایی به‌صورت نوسانی تناوبی و اغتشاش گردد [5].

رویهٔ انتقال پایدار برای تعیین عملکرد روش PMA

استفاده از تئوری دینامیک اغتشاشات برای تحلیل پاسخ عملکرد قیدهای احتمالاتی مسائل RBDO براساس رویهٔ انتقال پایدار روش AMV توسط Yong و Yi معرفی شد که رابطهٔ تکرار AMV برای تعیین نقطهٔ MPTP به‌صورت زیر تحت رویهٔ انتقال پایدار بهبود بخشیده شده است [5]:

$$U_{k+1}=U_k+\lambda C[f(u_k)-U_k] \qquad (٩)$$

که در آن C ماتریس غیرعمدی است که یک ماتریس ثابت و معین است. C به‌صورت یک ماتریس متعامد تعریف گردیده است که در هر سطر و ستون این ماتریس فقط عدد ۱ یا ۱- جا دارد و بقیهٔ درایه‌های ماتریس صفر است [5,17]. λ طول گام است که عددی بین صفر و یک است و عمدتاً مقدار آن خیلی کمتر از یک انتخاب می‌گردد. $f(u_k)$ یک نگاشت گسسته برای سیستم دینامیکی تحلیل PMA می‌باشد [5,15,17] که می‌تواند به‌صورت نگاشت زیر گسسته‌سازی شود:

$$f(u_k)=U_{k+1}=-\beta_t\frac{\nabla_u g(d,U_k)}{\|\nabla_u g(d,U_k)\|} \qquad (١٠)$$

که در آن U_{k+1} نقطهٔ گسسته در گام $k+1$ و $f(u_k)$ مقدار تابع براساس رویهٔ AMV می‌باشد. اگر مقدار λ برابر با ۱ و C=1 انتخاب گردد، رویهٔ تکراری رابطهٔ (۹) بدون کنترل و مطابق با رویهٔ AMV صورت می‌پذیرد. انتخاب مناسب ضریب λ وابسته به مقدار شعاع طیفی ماتریس هسیان تابع عملکرد در نقطهٔ طراحی است. اگر شعاع طیفی ماتریس هسیان (بزرگ‌ترین مقدار ویژهٔ ماتریس هسیان) بزرگ باشد، برای دست‌یابی به پاسخ پایدار، مقدار ضریب λ کوچک‌تری بایستی اتخاذ گردد. براساس فرمولاسیون

انتقال پایدار رابطهٔ (۹)، شعاع طیفی ماتریس هسیان مسائل عملکرد پیچیده و غیرخطی برای هم‌گرایی پایدار می‌توانند بااستفاده از ضریب λ و ماتریس C به‌نحو مناسب انتخاب گردد [5,15].

$$\overline{H} = I + \lambda C(H - I) \qquad (۱۱)$$

که در آن $H = \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}$ ماتریس هسیان تابع عملکرد است. این روش اگرچه هم‌گرایی یک مسئلهٔ بهینه را با قیدهای احتمالاتی تضمین می‌کند؛ اما هم‌گرایی رویهٔ انتقال، پایدار وابسته به انتخاب ماتریس C و طول گام λ است که عموماً، برای تأمین پایداری لازم مقدار ضریب λ بسیار ناچیز انتخاب می‌گردد. این امر تعداد تکرار زیادی برای هم‌گرایی و تحلیل عملکرد قیود احتمالاتی را منجر می‌گردد. لذا، زمان تحلیل تابع عملکرد در این نوع مسائل افزایش می‌یابد. اگرچه این الگوریتم نسبت به رویهٔ تکرار AMV توانمندتر است اما در مسائل با درجهٔ غیرخطی معتدل و مقعر ممکن است کارایی بسیار پایینی داشته باشد.

روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار برای تحلیل اولین مرتبه PMA

به‌منظور افزایش کارایی روش انتقال پایدار رابطه تکرار معادلهٔ (۹) به‌صورت زیر بهبود بخشیده شده است.

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k C[f(u_k) - U_k] \qquad (۱۲)$$

که در آن λ_k یک طول گام دینامیکی است که براساس اطلاعات مربوط به تکرار AMV به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\lambda_k = \min\{1, \left|\frac{1}{\delta\|D_k\|^2}[1 - \frac{g(d, U_{k+1})}{g(d, U_k)}]\right|\} \qquad (۱۳)$$

که در آن δ یک ضریب مثبت $0 < \delta < 1$ و $g(d, U_{k+1})$ مقدار تابع عملکرد جدید رویهٔ PMV و $g(d, U_k)$ مقدار تابع عملکرد قبلی رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار است. D_k بردار امتداد جستجو می‌باشد که به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$D_k = f(u_k) - U_k \qquad (۱٤)$$

مطابق با روابط فوق، طول گام به‌صورت دینامیکی در هر تکرار تنظیم شده است به‌طوری‌که، در تکرارهای اولیه به‌علت اختلاف زیاد بین تابع عملکرد $g(d, U_{k+1})$ و $g(d, U_k)$ بیشترین مقدار طول گام محاسبه می‌گردد. لذا، سرعت هم‌گرایی الگوریتم فوق افزایش می‌یابد. هم‌چنین در تکرارهای نهایی این الگوریتم اختلاف بین تابع عملکرد $g(d, U_{k+1})$ و $g(d, U_k)$ بسیار ناچیز می‌باشد لذا، طول گام کوچکی محاسبه گردیده که این امر در مسائل غیرخطی ممکن است موجب پایداری حل رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار گردد. از طرفی طول گام دینامیکی کمتر از واحد، منجر می‌شود تا احتمال موازی شدن بردار امتداد جستجوی جدید با بردار یکهٔ قبلی کاهش یابد لذا این رویه دچار ناپایداری حل به‌صورت نوسانی نمی‌گردد. در تکرارهای متوالی این الگوریتم، مقدار طول گام به‌علت کاهش مقدار بردار امتداد جستجو D_k ممکن است عدد بزرگی محاسبه گردد لذا، تکرار الگوریتم بدون کنترل صورت می‌پذیرد. برای کنترل طول گام و دست‌یابی به هم‌گرایی بدون اغتشاش، مقدار طول گام الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار به‌کمک شرط شیب در هر تکرار تصحیح شده است. شرط شیب برای ارزیابی تابع عملکرد قیدهای احتمالاتی مسائل RBDO به‌صورت زیر می‌باشد [18,19]:

$$\|U_{k+1} - U_k\|^2 \le \eta\|U_k - U_{k-1}\|^2 \quad \text{for} \quad k \ge 1 \qquad (۱۵)$$

که در آن $0.5 \le \eta < 1$ می‌باشد. در صورت برقراری نامساوی فوق رابطهٔ تکرار (۱۲) پایداری مناسب را دارد و بردار طراحی جدید مطابق با رابطهٔ (۱۲) قابل محاسبه است. اما، در صورت عدم برقراری شرط فوق یعنی $\|U_{k+1} - U_k\|^2 > \eta\|U_k - U_{k-1}\|^2$ طول گام رابطهٔ (۱۳) به‌صورت زیر تصحیح می‌گردد:

$$\lambda_k = \eta\lambda_k \qquad (۱٦)$$

باتوجه به رابطهٔ فوق، طول گام حاصل کمتر از مقدار قبلی می‌باشد. با جای‌گزینی مقدار طول گام (۱٦) در رابطهٔ تکرار بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (۱۲) شرط شیب مطابق با رابطهٔ (۱۵) دوباره چک می‌گردد. مشخص است که در تکرار رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (روابط

۱۲-۱۶) برای برقراری شرایط شیب نیازی به محاسبهٔ بردار گرادیان می‌باشد. روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار مطابق با گام‌های زیر می‌تواند در یک برنامهٔ کامپیوتری لحاظ گردد.

۱) تعریف تابع عملکرد قید احتمالاتی مسئلهٔ RBDO و خواص آماری متغیرهای تصادفی (X) و نیز تعیین متغیرهای طراحی مسئله (d).

۲) مقدار اولیهٔ بردار طراحی متغیرهای تصادفی مسئله $X_0 = \mu_x$، $k = 0$، δ و η.

۳) انتقال متغیرهای تصادفی در فضای نرمال استاندارد $U = T(X)$.

٤) محاسبهٔ بردار گرادیان تابع عملکرد $\nabla_u g(d, u_k)$.

۵) محاسبهٔ مقدار $f(u_k)$ برمبنای رابطهٔ (۱۰).

٦) محاسبهٔ طول گام بااستفاده از روابط (۱۳ و ١٤).

۷) محاسبهٔ مقدار جدید بردار طراحی متغیرهای تصادفی تابع عملکرد براساس رابطهٔ (۱۲).

۸) برای $k \geq 1$ کنترل شرایط شیب به‌صورت $\|U_{k+1} - U_k\|^2 \leq \eta \|U_k - U_{k-1}\|^2$.

در صورت برقراری ادامهٔ تکرار مطابق با گام ۹.

در عدم برقراری محاسبهٔ طول گام برمبنای $\lambda_k = \eta \lambda_k$ و بازگشت به مرحلهٔ ۷.

۹) محاسبهٔ شاخص قابلیت اعتماد $\beta_{k+1} = \|U_{k+1}\|$.

۱۰) کنترل معیار هم‌گرایی رویهٔ تکرار به‌صورت $\|D_k\| \leq 10^{-5}$ در صورت برقراری توقف و در غیر این‌صورت بازگشت به گام ٤.

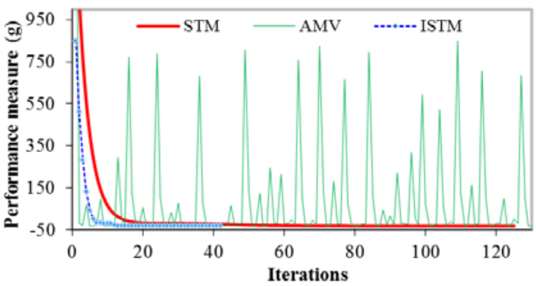
بررسی مثال‌های عددی و سازه‌ای

از پنج تابع عملکرد ریاضی و سازه‌ای برای ارزیابی هم‌گرایی الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار ارائه‌شده، استفاده شده است. برای تحلیل عملکرد این توابع، برنامه‌ای به زبان MATLAB تدوین شده است. نتایج تحلیل سه روش تکرار شامل: رویهٔ AMV، روش انتقال پایدار و روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار برای این توابع مقایسه شده است. معیارهایی مانند توانمندی (هم‌گرایی مناسب)، پایداری (هم‌گرایی صحیح) و کارایی (تعداد تکرار) روش‌های مورد بررسی تحلیل عملکرد مقایسه شده است. پارامتر طول گام برای روش انتقال پایدار برابر با ۰/۱ ($\lambda = 0.1$) و پارامترهای الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار به‌صورت $\delta = 0.5$ و $\eta = 0.95$ درنظر گرفته شده است.

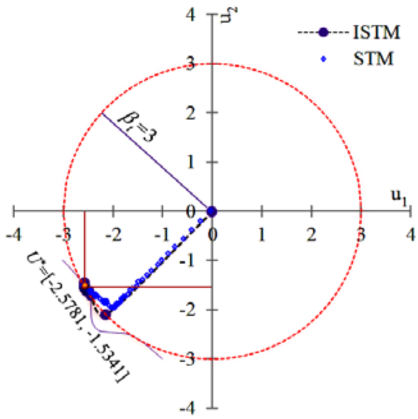
مثال ۱: تابع عملکرد غیرخطی. یک تابع عملکرد با درجهٔ غیرخطی بالا، مطابق با رابطهٔ زیر درنظر گرفته می‌شود [5]:

$$g_1 = x_1^3 + x_2^3 - 18 \qquad (۱۷)$$

که در آن $x_1 \sim N(10,5)$، $x_2 \sim N(9.9,5)$ و $\beta_t = 3.0$ که $N(\mu,\sigma)$ تابع توزیع احتمال نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. این تابع توسط مرجع [5] تحلیل شده است که نتایج مقدار تابع عملکرد آن برابر با ۳۱/۰٦۰۰٤- و بردار عملکرد هدف X_t =[-۲/۸۹۰۱۱، ۲/۲۲۹۳۷] حاصل گردیده است. این مثال توسط الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار تحلیل عملکرد گردیده است که مقدار نتایج هم‌گرا شدهٔ بردار هدف و تابع عملکرد به‌ترتیب بعد از ٤۲ تکرار برابر با X_t =[-۲/۸۹۰۵۸، ۲/۲۲۹۷٤] و ۳۱/۰٦٦٤۷۳- نتیجه شده است. در شکل (۱) تاریخچهٔ هم‌گرایی مقدار تابع عملکرد و در شکل (۲) تاریخچهٔ هم‌گرایی نقطه حداقل عملکرد برای مثال (۱) نشان داده شده است. مشخص است که رویهٔ AMV هم‌گرایی مغشوشی داشته و رویهٔ انتقال پایدار (STM) با ۱۲٦ تکرار هم‌گرا گردیده است. لذا الگوریتم ارائه‌شدهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (ISTM) علاوه بر تضمین پایداری با تعداد تکرار بسیار کمتری نسبت به رویهٔ STM هم‌گرا گردیده است. روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار در تکرارهای ابتدایی طول گام بالایی نسبت به روش انتقال پایدار داشته، اما در تکرارهای نهایی مقدار اندازهٔ امتداد جستجوی ناچیزی محاسبه گردیده است.



شکل ۱ مقایسهٔ هم‌گرایی روش‌های PMA برای مثال ۱



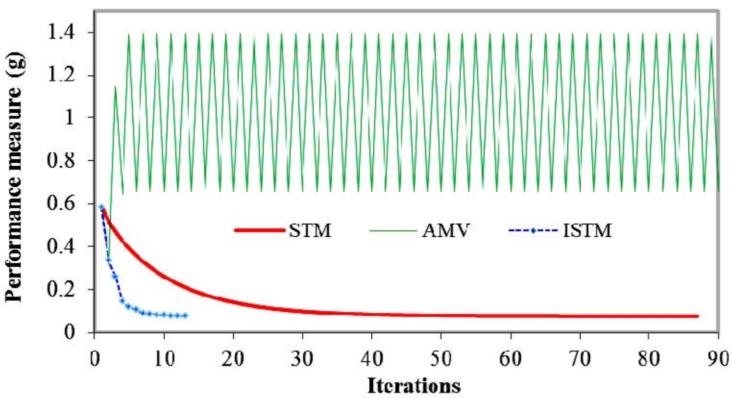
شکل ۲ تاریخچهٔ هم‌گرایی نقطهٔ حداقل عملکرد برای مثال ۱

مثال ۲: تابع عملکرد غیرخطی با تعداد متغیر زیاد. یک تابع عملکرد غیرخطی با هفت متغیر تصادفی نرمال مطابق با رابطهٔ زیر درنظر گرفته می‌شود [11]:

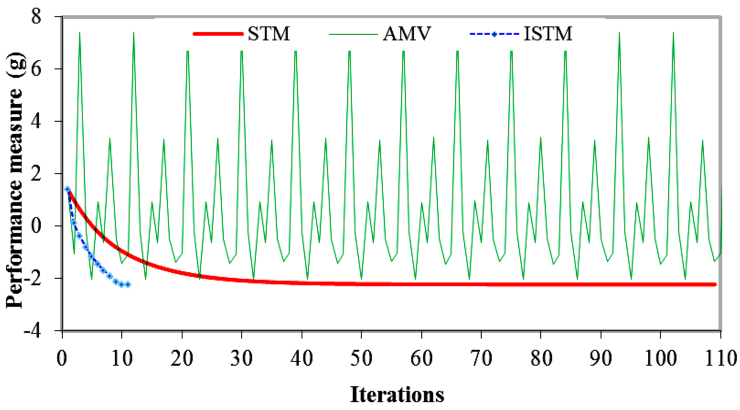
$$g_2=-0.75+0.489x_1x_4+0.843x_2x_3-0.0432x_5x_6+0.0556x_5x_7+0.000786x_7^2 \quad (۱۸)$$

که در آن $x_1-x_4\sim N(1,0.05)$، $x_5\sim N(0.3,0.006)$ ، $x_6,\ x_7\sim N(0,10)$ و $\beta_t=3.0$است.

اخیراً، این مثال توسط مرجع [5] تحلیل عملکرد گردیده است که مقدار هم‌گرا شدهٔ بردار طراحی هدف [−۸/۰۵٤٦٧، ۲۵/٦٧٧٩٨، ۰/۳۰۱، ۰/۹۷٦٤۳، ۰/۹٦۰۰٦، ۰/۹٦۰۰٦، ۰/۹۷٦٤۳]= X_t و مقدار تابع عملکرد برابر با ۰/۰۷۵۳٦ حاصل گردیده است. این مثال به‌کمک رویهٔ ISTM تحلیل عملکرد شده است که مقدار بردار هدف و مقدار تابع عملکرد هم‌گراشده به‌ترتیب برابر با [−۸/۱٤۲۰۱ ، ۲۵/٦٦۰٤۷، ۰/۳۰۱۱، ۰/۹۷٦٤٥، ۰/۹٦۰۰۸، ۰/۹٦۰۰۸، ۰/۹۷٦٤٥]= X_t و ۰/۰۷۵۲۹ بعد از ۱۲ تکرار نتیجه شده است. در شکل ۳ تاریخچهٔ هم‌گرایی تابع عملکرد این تابع نشان داده شده است. رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار با تعداد بسیار کمتری (در حدود ۰/۱ برابر) نسبت به رویهٔ انتقال پایدار هم‌گرا گردیده است و رویهٔ AMV هم‌گرایی به‌صورت نوسانی به دو نقطهٔ عملکرد {۰/٥٦٦٥۱، ۱/۳۹٥٥٤} نشان داده است.



شکل ۳ مقایسهٔ هم‌گرایی روش‌های PMA برای مثال ۲



شکل ٤ مقایسهٔ هم‌گرایی روش‌های PMA برای مثال ۳

مثال ۳: تابع عملکرد غیرخطی ریاضی. تـابع عملکـرد غیرخطی مطابق با رابطهٔ زیـر بـرای ایـن مثـال در نظـر گرفته می‌شود [11]:

$$g_3 = 0.3x_1^2x_2 - x_2 + 0.8x_1 + 1 \qquad (۱۹)$$

کـه در آن $x_1 \sim N(1.2, 0.42)$، $x_2 \sim N(1, 0.42)$ و $\beta_t = 6.0$ لحاظ گردیده است. این مثال توسط مرجع [11] با استفاده از رویـهٔ ترکیبـی و بهبودیافتـهٔ ترکیبـی اندازه‌گیـری عملکـرد تحلیـل گردیـده اسـت کـه تـابع عملکـرد هـم‌گراشـده بـه‌ترتیـب برابـر بـا ۲/۲۳۹۳– و ۲/۲۳۹٤–، بـردار عملکـرد بـه‌ترتیـب $X_t =$[۳/۱٦۱، ۰/۰۹٦–] $X_t =$[۳/۱۵٦، ۰/۱۰٤–] نتیجـــه شـــده اســـت. تاریخچهٔ هم‌گرایی تابع عملکرد این مثال در شـکل (٤) نشان داده شده است. رویه ISTM با تعداد تکرار بسـیار پایینی (۱۰ تکرار) هم‌گرا گردیده است که مقـدار بـردار طراحـی هـدف و تـابع عملکـرد ایـن مثـال برابـر بـا $X_t =$[۳/۱۵٦۲٤۲، ۰/۱۰٤۲۳–] و ۲/۲۲۹۳٤– نتیجـــه شده است. مشخص است که این مثال بـا تعـداد تکـرار مناسب، نتایج پایداری از تحلیل عملکرد این مثال ارائـه نموده است. لذا، الگوریتم ارائه‌شـدهٔ بهبودیافتـهٔ انتقـال پایدار با توجه به طول گام دینامیکی، توانـایی و کـارایی مناسبی برای رویهٔ اولین مرتبهٔ PMA نشان داده است.

مثال ٤: تابع عملکرد یک تیر. یـک تیر کنسـول تحـت بارهای عمودی در دو جهت متعامد مطابق با شـکل (۵) برای این مثال درنظر گرفته شده است. براساس طراحـی بهینه، ارتفاع و عرض تیر کنسول نشان داده‌شـده توسـط مراجع [1,8] با مقـدار شـاخص قابلیـت اعتمـاد هـدف ۳/۰۱۲ به‌ترتیب برابـر بـا ۲/٤۵۵ و ۳/۸۸ حاصـل شـده است.

$$g_4 = 2.5 - \frac{4L^3}{bhE}\sqrt{\left(\frac{P_x}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{P_y}{b^2}\right)^2} \qquad (۲۰)$$

که در آن E مدول ارتجـائی مـی‌باشـد کـه از تـابع توزیع احتمال نرمـال بـا میـانگین $۲/۹\times۱۰^{۷}$ و انحـراف معیار $۱/٤۵\times۱۰^{٦}$ و P_x از تابع نرمال با میـانگین ۵۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ و نیز P_y از تـابع احتمـال نرمـال بـا میانگین ۱۰۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ پیروی می‌کنند.



شکل ۵ تیر کنسول مثال ٤

مقدار شـاخص قابلیـت اعتمـاد هـدف برابـر بـا ۳ درنظر گرفته شده است. در جدول (۱) نتایج هـم‌گرایـی سه الگوریتم مورد بررسـی AMV، رویـهٔ انتقـال پایـدار (STM) و روش بهبودیافتهٔ انتقـال پایـدار (ISTM) درج شده است. تاریخچهٔ هم‌گرایی عملکرد تیر کنسول بـرای

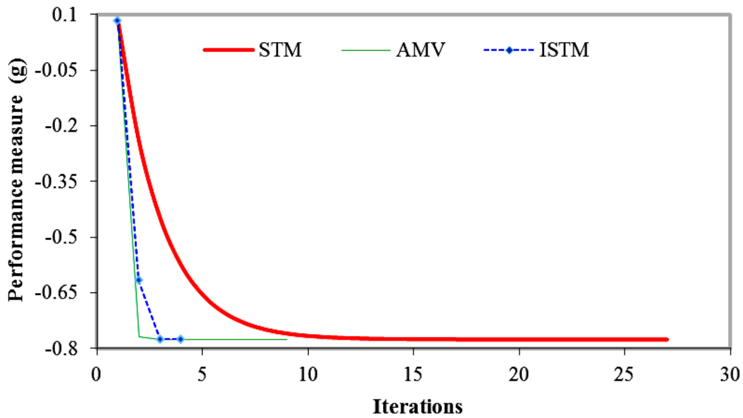
الگوریتم‌های مورد بررسی در شکل (٦) نشان داده شده است. همان‌طوری‌که مشخص است الگوریتم ارائه‌شده ISTM با تکرار کمتری به نتایجی مشابه با سایر الگوریتم‌ها هم‌گرا شده است. روش AMV نسبت به رویهٔ STM کارایی بیشتری داشته است لذا، روش STM برای مسائل با درجهٔ غیرخطی متوسط یک الگوریتم ناکارآمد است.

جدول ۱ مقادیر نتایج هم‌گرا شدهٔ تابع عملکرد مثال ٤

روش	g(X)	E	P_x	P_y
AMV	−۰/۷۷۵۹٤	۲٦۵۱۲۱٦۷	۵۱۵/۰۳۱۲	۱۲٤۵/٦۳٤
STM	−۰/۷۷۵۹۲	۲٦۵۱۲۳۲٤	۵۱۵/۰۳۲۱	۱۲٤۵/٦۳۵
ISTM	−۰/۷۷۵۹۵	۲٦۵۹٤۳٦۲	۵۱۵/٦۰۹۱	۱۲٤۵/٤٦۲

در دو جدول (۲) و (۳) به‌ترتیب تأثیر شاخص قابلیت اعتماد هدف و تأثیر تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی پایه به‌صورت غیرنرمال بر نتایج هم‌گرایی و میزان تابع عملکرد درج شده است. مشخص است که با افزایش شاخص قابلیت اعتماد هدف از تابع عملکرد کاسته شده است.

با غیرنرمال شدن متغیرهای تصادفی پایه علاوه بر تغییر عملکرد تعداد تکرار برای هم‌گرایی نیز افزایش یافته است اما، تعداد تکرار آنها تغییرات زیادی نشان نداده است. این الگوریتم توانایی تحلیل مسائل غیرخطی با متغیرهای غیرنرمال را دارد. به‌طوری‌که، برای تحلیل مسائل با متغیرهای غیرنرمال می‌تواند با تکرار مناسب به نتایج پایداری هم‌گرا گردد.



شکل ٦ مقایسهٔ هم‌گرایی روش‌های PMA برای مثال ٤

جدول ۲ مقایسهٔ شاخص قابلیت اعتماد هدف بر عملکرد تیر

β_t	۳/۵	٤/۵	٦
g(X)	−۰/۹۳۵۳۸	−۱/۲۷۲۷۵	−۱/۸۳۵۲۸
X_t	،۲٦۰۰۵۷۷۸ ،۵۱٦/۸۳ ۱۲۸۲/۰۹	،۲٤۹۱۸۱۸۹ ،۵۱۹/۹۷ ۱۳۵۰/۵۱	،۲۳۱۰۸۱۲۸ ،۵۲۳/۷۲ ۱٤٤۰/۸۳
NI	۷	۹	۱۲

مثال ۵: تابع عملکرد یک سازهٔ دودکش. تابع عملکرد یک دودکش مخروطی برگرفته از مرجع [14] به‌صورت زیر است:

$$g_5 = 1 - \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{\pi E\, t^2 \cos^2 \alpha} \times \left(\frac{P}{2\gamma} + \frac{M}{\eta r_1}\right) \qquad (۲۱)$$

که در آن M و P به‌ترتیب نیروی محوری و لنگر خمشی وارد بر سازه است. پارامترهای γ، η و v به‌ترتیب برابر با ۰/۳۳، ۰/٤۱ و ۰/۳ درنظر گرفته می‌شود. مقدار شاخص قابلیت اعتماد هدف (β_t) برابر با ۳/۷۵ لحاظ شده است. این مثال شامل ٦ متغیر غیروابسته است که خواص آماری آنها در جدول (٤) درج گردیده است.

این مثال مطابق با روش‌های AMV، روش انتقال پایدار و روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار ارائه‌شده، تحلیل عملکرد گردیده است. روش AMV هم‌گرایی به‌صورت نوسانی به دو نقطه حداقل عملکرد به‌صورت {۰/۱۳۵۰۷ و ۰/۱۳۵۰۲} داشته است. هم‌چنین، روش انتقال پایداری ناپایداری به‌صورت اغتشاش نشان داده است. روش بهبودیافتهٔ ارائه‌شده انتقال پایدار، به نتایج پایدار بعد از ۹ تکرار هم‌گرا شده که نقطهٔ حداقل عملکرد برای این مثال در جدول (۵) درج گردیده است.

مشخص است که طول گام پیشنهادی موجب حل مناسب مسائل غیرخطی سازه‌ای می‌شود و با تعداد تکرار بسیار پایین به نتایج مناسبی هم‌گرا می‌گردد.

جدول ۳ مقایسهٔ تابع توزیع متغیرهای تصادفی بر عملکرد تیر

NI	X_t	g(X)	متغیر
۷	۲٦۸۹۸۰٦٦، ۵۰۱/٦۹۷، ۱۲۹۲/۷٤۵	-۰/۸٤٦۱٤	E (نرمال) P_x (لوگ-نرمال) P_y (لوگ-نرمال)
۱۳	۲۷۷۵۷۳٤۹، ٤۸۸/٤۳٤، ۱٤۳۸/۸۸۲	-۱/۰۹۹۸۵	E (لوگ-نرمال) P_x (گامبل) P_y (گامبل)
۱۰	۲۷۷۰۹۷۸۹، ٤۹۵/۹۹۷، ۱٤۳۵/۹۸۷	-۱/۰۹۹۸٤	E (نرمال) P_x (لوگ-نرمال) P_y (گامبل)

جدول ٤ خواص آماری متغیرهای تصادفی مثال ۵

ضریب تغییرات	میانگین	تابع توزیع	توصیف	متغیر
۰/۰۵	۷۰۰۰۰	لوگ-نرمال	مدول ارتجائی (MPa)	E
۰/۰۵	۰/۰۰۲۵	نرمال	ضخامت (m)	t
۰/۰۲	۰/۵۲٤	نرمال	زاویه شیب (rad)	α
۰/۰۲۵	۰/۹	نرمال	قطر داخلی (m)	r_1
۰/۰۸	۸۰۰۰۰	گامبل	لنگر (N-m)	M
۰/۰۸	۷۰۰۰۰	گامبل	نیروی محوری(N)	P

جدول ۵ نتایج روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار برای مثال ۵

متغیرها	X^*	U^*
E	٦٦٠٩٩/٨٧	−١/١٢٢٣٠
t	٠/٠٠٢١٥٨	−٢/٧٣٧٠٦
α	٠/٥٢٧٠٢٠	٠/٢٨٨١٨
r_1	٠/٨٩٠٤٦٧	٠/٤٢٣٧٦
M	٩٨٠٠٧/٧٨	٢/١٦٨٠٩
P	٧٢٣٧٨/٩٤	٠/٥٩٠١٣
g(X*)	٠/١٣٥٠٣	

جدول ٦ مقایسهٔ الگوریتم‌های تحلیل مرتبهٔ اول PMA

روش	AMV		STM		ISTM	
مثال	NI	g(X)	NI	g(X)	NI	g(X)
١	حل مغشوش		١٢٦	−٣١/٠٦١٥	٤٢	−٣١/٠٦٦٥
٢	تناوب به ٢ نقطه		٨٦	−٠/٠٧٥٣	١٢	−٠/٠٧٥٣
٣	تناوب به ٨ نقطه		١٠٩	−٢/٢٢٩٣	١٠	−٢/٢٢٩٣
٤	٩	−٠/٧٧٥٩	٣٧	−٠/٧٧٥٩	٤	−٠/٧٧٥٩
٥	تناوب به ٢ نقطه		حل مغشوش		٩	٠/١٣٥٠

بحث نتایج عددی

نتایج سه الگوریتم رویهٔ اندازه‌گیری عملکرد مانند AMV (که در آن طول گام و ماتریس C برابر با واحد درنظر گرفته‌شده (رابطهٔ ٨)، روش انتقال پایدار (STM) (با طول گام برابر با ٠/١ و ماتریس $C = I$) و روش بهبودیافتهٔ انتقال پایدار (ISTM) (با طول گام دینامیکی مطابق با رابطهٔ (١٥) به‌ازای ضرایب $\delta = 0.5$، $\eta = 0.95$ و ماتریس $C = I$) مقایسه شده است. مقدار تابع عملکرد ((g(X)) و تعداد برآورد مشتق تابع عملکرد (NI) برای این الگوریتم‌ها در جدول ٦ درج شده است. مشخص است که الگوریتم AMV، هم‌گرایی پایداری در مسائل غیرخطی نداشته است. رویهٔ AMV در مثال ٤ هم‌گرا شده است و تعداد تکرار این الگوریتم برای هم‌گرا شدن خیلی کمتر از رویه STM می‌باشد. تعداد تکرار رویهٔ ISTM خیلی کمتر از رویه STM بوده است و نیز در مثال ٤ نیز با تعداد تکرار کمتری نسبت به رویهٔ AMV هم‌گرا شده است.

انتخاب طول گام براساس شرایط شیب و مقدار توابع عملکرد در تکرارهای پیاپی موجب شده است که الگوریتم ISTM با تعداد تکرار خیلی مناسب به هم‌گرایی صحیحی از توابع عملکرد غیرخطی قیدهای احتمالاتی مسائل RBDO منجر گردد. به‌طوری‌که این الگوریتم توانمندی بسیار بالاتری نسبت به رویهٔ AMV دارد و از طرفی، به نتایجی مشابه با رویهٔ انتقال پایدار هم‌گرا شده می‌رسد اما، نسبت آن کارایی بسیار بالاتری دارد.

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک رویهٔ تحلیل عملکرد براساس تئوری اغتشاشات برمبنای روش انتقال پایدار ارائه شده است. یک الگوریتم بهبودیافتهٔ انتقال پایدار با طول گام دینامیکی براساس شرایط شیب پایه‌گذاری شده است. محاسبهٔ طول گام رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار براساس شرایط شیب، موجب پایداری عددی توابع عملکرد

غیرخطی شده است. کارایی، توانمندی صحت هم‌گرایی و پایداری عددی رویهٔ ISTM، با الگوریتم‌های STM و روش AMV، مقایسه شده است که به‌طور خلاصه نتایج زیر استنتاج شده است.

۱) رویهٔ AMV یک الگوریتم ساده برای تحلیل عملکرد می‌باشد اما در مسائل غیرخطی توانمندی مناسب ندارد و نتایج پایداری از تحلیل عملکرد توابع غیرخطی نشان نداده است (مثال‌های ۱ تا ۳ و ۵)

۲) رویهٔ تکرار AMV در صورت هم‌گرا شدن از رویهٔ انتقال پایدار کارایی بیشتری دارد اما، توانمندی آن نسبت به STM کمتر است.

۳) الگوریتم ISTM نسبت به رویهٔ AMV توانمندی بیشتری دارد و برخلاف رویهٔ تکرار AMV در تمامی مثال‌ها هم‌گرا شده است.

٤) رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار یک رویهٔ تکرار توانمند با هم‌گرایی مناسب است. انتخاب طول گام دینامیکی در رویهٔ بهبودیافتهٔ انتقال پایدار موجب افزایش توانمندی آن شده و نسبت به رویهٔ انتقال پایدار با تعداد تکرار بسیار کمتری هم‌گرا گردیده است.

مراجع

1. Yang, R.J., Gu, L., "Experience with approximate reliability–based optimization methods", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol, 26, No. 2, pp. 152-159, (2004).
2. Cheng, G.D., Xu, L., Jiang, L., "A sequential approximate programming strategy for reliability-based optimization", *Computers and Structures*, Vol. 84, No. 21, pp. 1353-1367, (2006).
3. Chiralaksanakul, A., Mahadevan, S., "First-order approximation methods in reliability-based design optimization", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 851-857, (2005).
4. Tu, J., Choi, K.K., Young, H.P., "A new study on reliability–based design optimization", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 4, pp. 557-564, (1999).
5. Yang, D., Yi, P., "Chaos control of performance measure approach for evaluation of probabilistic constraints", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, pp.83-92, (2009).
6. Lee, J.O, Yang, Y.S., Ruy, W.S., "A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization", Computers and Structures, Vol. 80, pp. 257-269, (2002).
7. Li, H., Foschi, R.O., "An inverse reliability method and its application", *Structural Safety*, Vol. 20, pp. 257-270, (1998).
8. Yi, P., Cheng, G.D., Jiang, L., "A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization", *Structural Safety*, Vol. 30, No. 2, pp. 91-109, (2008).
9. Youn, B.D., Choi, K.K., "An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 5, pp. 403–411, (2004).
10. Youn, B.D., Choi, K.K., Park, Y.H., "Hybrid analysis method for reliability based design optimization", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 3, pp. 221–232, (2003).

11. Youn, B.D., Choi, K.K., Du, L., "Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 29, pp. 134–148, (2005a).
12. Youn, B.D., Choi, K.K., Du, L., "Enriched performance measure approach for reliability-based design optimization", *AIAA Journal*, Vol. 43, No.4, pp. 874–884, (2005b).
13. Gong, J.X., Yi, P., "A robust iterative algorithm for structural reliability analysis", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 43, No. 4, pp. 519–527, (2011).
14. Keshtegar, B., Miri, M., "An enhanced HL-RF Method for the computation of structural failure probability based on relaxed approach", *Civil Engineering Infrastructures*, Vol. 1, No. 1, pp. 69-80, (2013).
15. Yang, D., "Chaos control for numerical instability of first order reliability method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 5, No. 10, pp. 3131-3141, (2010).
16. Santosh. T. V., Saraf. R.K., Ghosh. A.K., Kushwaha. H.S., "Optimum step length selection rule in modified HL-RF method for structural reliability", *International journal of Pressure Vessels Piping*, Vol. 83, No. 10, pp. 742–748, (2006).
17. Schmelcher, P., Diakonos, F. K., "General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems", *Physical Review Letters*, Vol. 57, No.1, pp. 2739-2754, (1998).
18. Keshtegar, B., Miri, M., "Introducing Conjugate gradient optimization for modified HL-RF method", *Engineering Computations*, Vol. 31, No. 4, pp. 775-790, (2014).
19. Narushima,Y., Yabe, H., "Conjugate gradient methods based on secant conditions that generate descent search directions for unconstrained optimization", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 236, pp. 4303-4317, (2012).